Μάθημα....................	:	**Θεμελιώδεις Έννοιες των Μαθηματικών** (Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων)
Ακαδημαϊκό Έτος..........	:	**2017 - 2018**
Περιεχόμενο................	:	**Εξεταστική Σεπτεμβρίου (14 ΣΕΠ 2018)**
Ημερομηνία Στοιχειοθεσίας	:	2019/08/28 (ώρα 21:19:16)
Δημιουργήθηκε από.......	:	Κυριάκος Γ. Μαυρίδης
Ηλεκτρονικό Ταχυδρομείο	:	• kyriakos.g.mavridis@gmail.com • kmavridi@uoi.gr
Ιστοσελίδα..................	:	http://users.uoi.gr/kmavridi/
Άδεια Χρήσης..............	:	*"Creative Commons Αναφορά Δημιουργού 4.0 Διεθνές"* (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Διδάσκοντες: Α. ΤΟΛΙΑΣ, Ε. ΝΙΚΟΛΙΔΑΚΗΣ
14 Σεπτεμβρίου 2018

Θέμα 1. [1 μον.]
α) Να κάνετε πίνακα αλήθειας για την πρόταση $[(\sim p) \wedge (p \vee q)] \Rightarrow (p \wedge q)$.
β) Αν η πρόταση $[(\sim p) \wedge (p \vee q)] \Rightarrow (p \wedge q)$ είναι ψευδής τι συμπεραίνετε για τις προτάσεις p και q; Εξηγήστε με ποιον τρόπο βγάζετε το συμπέρασμά σας από τον παραπάνω πίνακα αλήθειας.

Θέμα 2. [2 μον.]
(i) Αν A, B, Γ είναι τρία σύνολα, δείξτε ότι $A \times (B \cup \Gamma) = (A \times B) \cup (A \times \Gamma)$.
(ii) Αν A, B, Γ είναι τρία σύνολα ώστε $A \times A = B \times \Gamma$, να δείξετε ότι $A = B \cap \Gamma$.
(iii) Αν $A = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\Big\}$ και $B = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}$, να υπολογίσετε τη συμμετρική διαφορά $A \Delta \mathcal{P}(B)$ των συνόλων A και $\mathcal{P}(B)$.

Θέμα 3. [2 μον.]
(i) Θεωρούμε το σύνολο $X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ f \text{ συνάρτηση}\}$ όλων των πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής. Στο σύνολο X θεωρούμε τη σχέση $\sim$ που ορίζεται ως εξής:

$$f \sim g \iff \text{η συνάρτηση } f - g \text{ είναι φραγμένη.}$$

Να δείξετε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο X.
(ii) Έστω A ένα σύνολο και $\leq_1$, $\leq_2$ δύο σχέσεις διάταξης στο A. Ορίζουμε μια νέα σχέση $\leq$ στο A ως εξής:

$$x \leq y \iff x \leq_1 y \text{ και } x \leq_2 y.$$

Να δείξετε ότι η $\leq$ είναι επίσης σχέση διάταξης στο A.

Θέμα 4. [2 μον.]
(i) Έστω $f : K \to \Lambda$ μια συνάρτηση. Να ορίσετε το σύνολο $f(A)$ για $A \subseteq K$ και το σύνολο $f^{-1}(B)$ για $B \subseteq \Lambda$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι αν X, Y είναι υποσύνολα του K τότε $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ και $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$. Να δείξετε επίσης ότι αν η f είναι αμφιμονοσήμαντη (1-1), τότε για οποιαδήποτε υποσύνολα X, Y του K ισχύει $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.
(ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$, και το σύνολο $A = (-1, 2]$. Να υπολογιστούν τα σύνολα $f(A)$, $f^{-1}(A)$, $f(f^{-1}(A))$ και $f^{-1}(f(A))$.

Θέμα 5. [2 μον.]
(i) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$ και $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Δίνονται επίσης τα σύνολα $A = (-\sqrt{2}, \sqrt{3})$ και $B = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
(α) Βρείτε τα σύνολα $f(A)$ και $f(B)$.
(β) Βρείτε τα supremum και infimum των συνόλων του προηγούμενου ερωτήματος [Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς.]

Θέμα 6. [2 μον.]
(i) Δίνονται τέσσερα σύνολα A_1, B_1, A_2, B_2 ώστε τα σύνολα A_1, A_2 να είναι ξένα και τα σύνολα B_1, B_2 να είναι ξένα. Αν $A_1 \simeq B_1$ και $A_2 \simeq B_2$ να δείξετε ότι $A_1 \cup A_2 \simeq B_1 \cup B_2$.
(ii) Δίνονται δύο σύνολα K, Λ.
(α) Αν $K \setminus \Lambda \simeq \Lambda \setminus K$ να δείξετε ότι $K \simeq \Lambda$.
(β) Με την επιπλέον υπόθεση ότι τα σύνολα K, Λ είναι πεπερασμένα να δείξετε ότι ισχύει το αντίστροφο στο ερώτημα (α).

Καλή επιτυχία!

24 ΣΕΠ 2018

ΘΕΜΕΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΘΕΜΑ 1

(α)

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$(\sim p) \wedge (p \vee q)$	$p \wedge q$	ΤΕΛ
α	α	ψ	α	ψ	α	α
α	ψ	ψ	α	ψ	ψ	α
ψ	α	α	α	α	ψ	ψ
ψ	ψ	α	ψ	ψ	ψ	α

(b) Αν η τελική πρόταση είναι ψευδής τότε η p είναι ψευδής και η q αληθής. Πράγματι, κοιτάτε στην τελευταία στήλη πού υπάρχει το "ψ". Σε ποια γραμμή υπάρχει "ψ", κοιτάτε σε αυτήν την γραμμή τι είναι τα p και q. Εδώ βλέπουμε ότι "ψ" υπάρχει στην 3η γραμμή και στην γραμμή αυτή το p είναι ψευδές ενώ το q είναι αληθές.

ΘΕΜΑ 2

(i) $(x,y) \in A \times (B \cup \Gamma)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cup \Gamma)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge [\, y \in B \vee y \in \Gamma \,]$

$\Leftrightarrow [x \in A \wedge y \in B] \vee [\, x \in A \wedge y \in \Gamma]$

$\Leftrightarrow (x,y) \in A \times B \vee (x,y) \in A \times \Gamma$

$\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times \Gamma)$

(ii) $x \in A \Leftrightarrow (x,x) \in A \times A \xLeftrightarrow{A \times A = B \times \Gamma} (x,x) \in B \times \Gamma$

$\Leftrightarrow x \in B \wedge x \in \Gamma \Leftrightarrow x \in B \cap \Gamma$

(iii) $P(B) = P(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$

$A \triangle P(B) = (A \setminus P(B)) \cup (P(B) \setminus A)$

$= \Big(\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} \setminus \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} \Big)$

$\cup$ (ένωση)

$\Big(\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} \setminus \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} \Big)$

$= \phi \cup \{\{\phi, \{\phi\}\}\} = \{\{\phi, \{\phi\}\}\}.$

ΘΕΜΑ 3

(i) • <u>ανακλαστική</u>: $f \sim f$ αν και μόνο αν η συνάρτηση $f-f=0$ είναι φραγμένη που ισχύει.

• <u>συμμετρική</u>: $f \sim g$ αν και μόνο αν η $f-g$ είναι φραγμένη δηλαδή

$$(\exists M>0) \text{ τ.ω. } |f(x)-g(x)| \leq M, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Όμως τότε επίσης ισχύει ότι $|g(x)-f(x)| \leq M$, $\forall x \in \mathbb{R}$, οπότε και η $g-f$ είναι φραγμένη, άρα $g \sim f$.

• <u>μεταβατική</u>: Έστω ότι $f \sim g$ και $g \sim h$. Τότε η $f-g$ είναι φραγμένη, δηλαδή $(\exists M_1>0)$ τ.ω. $|f(x)-g(x)| \leq M_1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, και επίσης η $g-h$ είναι φραγμένη, δηλαδή $(\exists M_2>0)$ τ.ω. $|g(x)-h(x)| \leq M_2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Έτσι, για τυχόν $x \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$|f(x)-h(x)| = |f(x)-g(x)+g(x)-h(x)|$$
$$\leq |f(x)-g(x)| + |g(x)-h(x)|$$
$$\leq M_1 + M_2$$

Συνεπώς και η $f-h$ είναι φραγμένη οπότε $f \sim h$.

(ii)

- <u>ανακλαστική</u> Έχουμε

$$x \leq x \iff (x \leq_1 x \;\wedge\; x \leq_2 x)$$

Όμως οι $\leq_1$ και $\leq_2$ είναι σχέσεις διάταξης άρα ανακλαστικές, οπότε ισχύει.

- <u>αντισυμμετρική</u> Έστω ότι $x \leq y$ και $y \leq x$. Τότε $(x \leq_1 y \;\wedge\; x \leq_2 y)$ και $(y \leq_1 x \wedge y \leq_2 x)$ οπότε $(x \leq_1 y \;\wedge\; y \leq_1 x)$ και $(x \leq_2 y \wedge y \leq_2 x)$

⑤

Όμως οι $\leq_1$ και $\leq_2$ είναι σχέσεις διάταξης, άρα $x=y$.

- μεταβατική: Έστω $x \leq y$ και $y \leq z$.

Τότε $(x \leq_1 y \wedge x \leq_2 y)$ και $(y \leq_1 z \wedge y \leq_2 z)$, συνεπώς

$(x \leq_1 y \wedge y \leq_1 z)$ και $(x \leq_2 y \wedge y \leq_2 z)$.

Όμως οι $\leq_1$ και $\leq_2$ είναι σχέσεις διάταξης, οπότε $x \leq_1 z$ και $x \leq_2 z$

άρα $x \leq z$.

ΘΕΜΑ 4

Εχουμε

- $f(A) = \{\lambda \in \Lambda : \exists k \in K$ τ.ω. $f(k) = \lambda\}$
- $f^{-1}(B) = \{k \in K : f(k) \in B\}$
- $y \in f(X \cup Y)$

$\Rightarrow \exists x \in (X \cup Y)$ τ.ω. $f(x) = y$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\exists x \in X) \text{ τ.ω. } f(x) = y \\ \text{ή} \\ (\exists x \in Y) \text{ τ.ω. } f(x) = y \end{array} \right\}$

$\Rightarrow y \in f(X)$ ή $y \in f(Y)$

$\Rightarrow y \in f(X) \cup f(Y)$

Το αντιστροφο προκυπτει αναλογα.

- $y \in f(X \cap Y)$

$\Rightarrow (\exists x \in X \cap Y)$ τ.ω. $f(x) = y$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{l} (\exists x \in X) \text{ τ.ω. } f(x) = y \\ \text{και} \\ (\exists x \in Y) \text{ τ.ω. } f(x) = y \end{array} \right)$

$\Rightarrow y \in f(X) \wedge y \in f(Y) \Rightarrow y \in f(X) \cap f(Y)$.

- Έχουμε ήδη αποδείξει το $\subseteq$. Για το $\supseteq$ έχουμε

$$y \in f(X) \cap f(Y) \Rightarrow y \in f(X) \wedge y \in f(Y)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{l} (\exists x_1 \in X) \text{ τ.ω. } f(x_1) = y \\ \text{και} \\ (\exists x_2 \in Y) \text{ τ.ω. } f(x_2) = y \end{array} \right)$$

Όμως η f είναι 1-1 άρα $x_1 = x_2$, και έτσι αν θέσουμε $x = x_1 = x_2$ έχουμε

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{l} (\exists x \in X) \text{ τ.ω. } f(x) = y \\ \text{και} \\ (\exists x \in Y) \text{ τ.ω. } f(x) = y \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow (\exists x \in X \cap Y) \text{ τ.ω. } f(x) = y$$

$$\Rightarrow y \in f(X \cap Y).$$

Άρα τελικά έχουμε $f(X) \cap f(Y) = f(X \cap Y)$.

(ii) Έχουμε

- $f(A) = \{ y \in \mathbb{R} : y = x^2$ και $x \in (-1, 2] \}$

$= \{ y \in \mathbb{R} : y = x^2$ και $x \in (-1, 0) \}$

$\cup$

$\{ y \in \mathbb{R} : y = x^2$ και $x \in [0, 2] \}$

$= (0, 1) \cup [0, 4]$

$= [0, 4]$.

- $f^{-1}(A) = \{ x \in \mathbb{R} : x^2 \in (-1, 2] \}$

$= \{ x \in \mathbb{R} : x^2 \in (-1, 0) \}$

$\cup \{ x \in \mathbb{R} : x^2 \in [0, 2] \}$

$= \emptyset \cup [0, \sqrt{2}] = [0, \sqrt{2}]$.

9

- $f\left(f^{-1}(A)\right) = f\left([0, \sqrt{2}]\right)$

$= \{y \in \mathbb{R} : y = x^2 \text{ και } x \in [0, \sqrt{2}]\}$

$= [0, 2]$

- $f^{-1}\left(f(A)\right) = f^{-1}\left([0, 4]\right)$

$= \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in [0, 4]\}$

$= \{x \in (-\infty, 0) : x^2 \in [0, 4]\}$

$\cup \{x \in [0, +\infty) : x^2 \in [0, 4]\}$

$= [-2, 0) \cup [0, 2] = [-2, 2].$

ΘΕΜΑ 5

(α)

- $f(A) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ και } x \in A\}$

$= \{y \in \mathbb{Q} : y = x \text{ και } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{3})\}$

$\cup$

$\{y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : y = 0 \text{ και } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{3})\}$

$= \left((-\sqrt{2}, \sqrt{3}) \cap \mathbb{Q}\right) \cup \emptyset$

$= (-\sqrt{2}, \sqrt{3}) \cap \mathbb{Q}.$

- $f(B) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ και } x \in B\}$

$= \{y \in \mathbb{Q} : y = x \text{ και } x \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})\}$

$\cup$

$\{y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : y = 0 \text{ και } x \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})\}$

$= \left((\sqrt{2}, \sqrt{3}) \cap \mathbb{Q}\right) \cup \emptyset$

$= (\sqrt{2}, \sqrt{3}) \cap \mathbb{Q}$

(b)

- $\sup\left(f(A)\right) = \sup\left((-\sqrt{2},\sqrt{3})\cap\mathbb{Q}\right)$

Παρατηρούμε ότι το $\sqrt{3}$ είναι άνω φράγμα του $f(A)$. Επίσης λόγω της πυκνότητας των ρητών στους πραγματικούς,

για τυχόν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $\sqrt{3} - \varepsilon < q < \sqrt{3}$. Επομένως

$\sup\left(f(A)\right) = \sqrt{3}$

- Με ακριβώς ίδιο τρόπο όπως παραπάνω παίρνουμε $\inf\left(f(A)\right) = -\sqrt{2}$, $\sup f(B) = \sqrt{3}$ και $\inf\left(f(B)\right) = \sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ 6

(i) Έχουμε

$A_1 \simeq B_1 \Rightarrow \exists f_1 : A_1 \to B_1$ με f_1 "1-1" και επί.

$A_2 \simeq B_2 \Rightarrow \exists f_1 : A_2 \to B_2$ με f_2 "1-1" και επί.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f_3 : A_1 \cup A_2 \to B_1 \cup B_2$ με τύπο

$$f_3(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A_1 \\ f_2(x), & x \in A_2 \end{cases}$$

Αφού $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, η f_3 είναι καλά ορισμένη. Ας είναι $x_1, x_2 \in A_1 \cup A_2$ με $x_1 \neq x_2$. Τότε έχουμε, με δεδομένο ότι $A_1 \cap A_2 = \emptyset$,

- $x_1 \in A_1$ και $x_2 \in A_2$

$$\left.\begin{aligned} f_3(x_1) &= f_1(x_1) \\ f_3(x_2) &= f_2(x_2) \end{aligned}\right\}$$ Όμως $f_1(x_1) \in B_1$ και $f_2(x_2) \in B_2$ και επιπλέον $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, οπότε $f_1(x_1) \neq f_2(x_2)$ άρα $f_3(x_1) \neq f_3(x_2)$

- $x_1 \in A_2$ και $x_2 \in A_1$

Ομοίως με το προηγούμενο προκύπτει ότι

$f_3(x_1) \neq f_3(x_2)$

- $x_1 \in A_1$ και $x_2 \in A_1$

$$\left.\begin{array}{l} f_3(x_1) = f_1(x_1) \\ f_3(x_2) = f_1(x_2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Όμως η } f_1 \text{ είναι "1-1"} \\ \text{οπότε } f_1(x_1) \neq f_1(x_2) \end{array}$$

Άρα και $f_3(x_1) \neq f_3(x_2)$

- $x_1 \in A_2$ και $x_2 \in A_2$

Ομοίως με το προηγούμενο προκύπτει ότι $f_3(x_1) \neq f_3(x_2)$

Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε $f_3(x_1) \neq f_3(x_2)$ οπότε η f_3 είναι "1-1".

Ακόμη, έστω $y \in B_1 \cup B_2$. Με δεδομένο ότι $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, προκύπτει ότι ή $y \in B_1$ ή $y \in B_2$. Έχουμε λοιπόν

- $\underline{y \in B_1}$ Η f_1 είναι επί του B_1, άρα $\exists\, x \in A_1$ με $f_1(x) = y$. Όμως $f_1(x) = f_3(x)$, άρα $f_3(x) = y$.
- $\underline{y \in B_2}$ Ομοίως με το προηγούμενο προκύπτει ότι $\exists\, x \in A_2$ με $f_3(x) = y$.

Άρα, σε κάθε περίπτωση, υπάρχει $x \in A_1 \cup A_2$ με $f_3(x) = y$, συνεπώς η f_3 είναι επί.

Αφού, λοιπόν, η f_3 είναι "1-1" και επί έχουμε ότι $A_1 \cup A_2 \simeq B_1 \cup B_2$

(ii, a) Έχουμε
$K \setminus \Lambda \simeq \Lambda \setminus K \Rightarrow \exists\, f : K \setminus \Lambda \to \Lambda \setminus K$ με f "1-1" και επί. Θεωρούμε επίσης γνωστό ότι $K = (K \setminus \Lambda) \cup (K \cap \Lambda)$, το οποίο πρέπει αλλιώς να αποδειχθεί εύκολα. Έτσι θεωρούμε την συνάρτηση $g : K \to \Lambda$ με τύπο

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & \text{αν } x\in K\setminus\Lambda \\ x, & \text{αν } x\in K\cap\Lambda \end{cases}$$

Θα δείξουμε ότι η g είναι "1-1" και επί.

Ας είναι $x_1, x_2 \in K$ με $x_1 \neq x_2$. Τότε

- <u>$x_1 \in K\setminus\Lambda$ και $x_2 \in K\setminus\Lambda$</u>

$$\left.\begin{array}{l} g(x_1)=f(x_1) \\ g(x_2)=f(x_2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Όμως η } f \text{ είναι "1-1"} \\ \text{οπότε } f(x_1)\neq f(x_2) \\ \text{άρα και } g(x_1)\neq g(x_2) \end{array}$$

- <u>$x_1 \in K\cap\Lambda$ και $x_2 \in K\cap\Lambda$</u>

$$\left.\begin{array}{l} g(x_1)=x_1 \\ g(x_2)=x_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Όμως } x_1\neq x_2 \text{ άρα} \\ g(x_1)\neq g(x_2) \end{array}$$

- <u>$x_1 \in K\setminus\Lambda$ και $x_2 \in K\cap\Lambda$</u>

$$\left.\begin{array}{l} g(x_1)=f(x_1) \\ g(x_2)=x_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Όμως } f(x_1)\in\Lambda\setminus K \\ \text{και } x_2\in\Lambda\cap K \\ \text{οπότε } f(x_1)\neq x_2 \end{array}$$

άρα και $g(x_1)\neq g(x_2)$

- <u>$x_1 \in K\cap\Lambda$ και $x_2 \in K\setminus\Lambda$</u>

Όμοια με το προηγούμενο προκύπτει ότι $g(x_1)\neq g(x_2)$

Αρα σε καθε περιπτωση εχουμε οτι $g(x_1)\neq g(x_2)$ συνεπως η g ειναι "1-1".

Επισης, εστω $y\in\Lambda$. Τοτε

- $\underline{y\in\Lambda\cap K}$: Τοτε $y=g(y)$
- $\underline{y\in\Lambda\setminus K}$: Τοτε, επειδη η f ειναι επι του $\Lambda\setminus K$, υπαρχει $x\in K\setminus\Lambda$ με $f(x)=y$. Ομως $g(x)=f(x)$, αρα τελικα $g(x)=y$.

Συνεπως σε καθε περιπτωση υπαρχει στοιχειο $u\in K$ με $g(u)=y$, αρα η g ειναι επι.

(ii, b) Αφου $K\simeq\Lambda$, υπαρχει $f:K\to\Lambda$ "1-1" και επι. Ετσι, επειδη τα K,Λ τα εχουμε υποθεσει και πεπερασμενα, εχουμε τελικα οτι αυτα εχουν ακριβως τον ιδιο αριθμο στοιχειων, δηλαδη $\text{card}\,K=\text{card}\,\Lambda$.
Σημειωνουμε οτι αυτο <u>δεν</u> σημαινει πως εχουν και τα ιδια στοιχεια, για παραδειγμα μπορει να εχουμε $K=\{1,2,3\}$ και $\Lambda=\{1,5,9\}$.

Επειδή $K = (K \setminus \Lambda) \cup (K \cap \Lambda)$ και $(K \setminus \Lambda) \cap (K \cap \Lambda) = \emptyset$

έχουμε

$$card(K) = card(K \setminus \Lambda) + card(K \cap \Lambda)$$

Ομοίως έχουμε

$$card(\Lambda) = card(\Lambda \setminus K) + card(K \cap \Lambda)$$

Όμως $card(K) = card(\Lambda)$ οπότε

από τις δύο προηγούμενες σχέσεις έχουμε

ότι $card(K \setminus \Lambda) = card(\Lambda \setminus K)$.